Module MOP
Notes de cours

Francis Sourd

1 Introduction

1.1 Planification et ordonnancement en Recherche Opérationnelle

Cours "*vertical*" : utilisation des principales méthodes et outils de la recherche opérationnelle pour résoudre différents problèmes issus d'un même domaine d'application.

- programmation linéaire
- programmation dynamique et programmation dynamique stochastique
- théorie des graphes (chemins, flots)
- algorithmes d'approximation
- branch-and-bound, programmation par contraintes
- heuristiques et voisinages

1.2 Entreprise et ERP

> Forget about planning —it doesn't do that— and forget about resource, a throwaway term. But remember the enterprise part. This is ERP's true ambition.
> *What is ERP ?* Christopher Koch

`http://www.club-era.com/club_era_pages/entreprisevirtuelle.htm`

1.3 Stratégique, tactique et opérationnel

- Planification à *long terme*, niveau *stratégique*. (Dé)localisation et ouverture d'entrepôts.
- Planification à *moyen terme*, niveau *tactique*. Production sur qq trimestres.
- Planification à *court terme*, niveau *opérationnel*. Ordonnancement. Livraisons. Problèmes combinatoires.

2 Prévision de la demande

- `http://www-lmc.imag.fr/lmc-sms/Serge.Degerine/Enseignement/SCM62.pdf`
- Etapes préalable à toute planification
- Toujours penser à confronter les avis de l'"homme du terrain" avec les conclusions d'une approche "RO".

2.1 Série chronologiques

- Modèle des *séries choronologiques* (ou *chroniques* ou *séries temporelles*.
- X_t est une variable aléatoire représentant la demande lors de la période (jour, semaine, mois selon le secteur) t
- On dispose également d'un historique des demandes durant les périodes antérieures, notée $x_1, \cdots, x_t$ (on suppose qu'on se trouve à la date t. Ces valeurs sont les réalisations des variables aléatoires. Il faut en général redresser ces données dans un pré-traitement :
  - Les périodes n'ont pas toutes la même durée (nombre de jours par mois, jours fériés) : normaliser selon le nombre de jours ouvrables.
  - Tenir compte des abérrations exceptionnelles : grèves, catastrophes
  - Tenir compte de l'inflation
- Prévoir la demande pour les prochaines périodes : déterminer des valeurs $\hat{x}_{t+1}, \hat{x}_{t+2}, \ldots$ que prendront les variables aléatoires $X_{t+1}, X_{t+2}, \ldots$ de manière à ce qu'elles soient le plus proche possible des valeurs $x_{t+1}, x_{t+2}, \ldots$ effectivement prises par les variables aléatoires.
- La prévision est bien sûr approximative. Elle doit être accompagnée d'un intervalle de confiance pour chaque prévision. De plus, la prévision n'est valable que dans un futur relativement proche (variable selon le secteur d'application, le climat économique).
- *extrapolation* à partir de l'historique. Dans des modèles plus complexes, on peut ajouter des variables explicatives. Ex : Une hausse des ventes d'imprimantes qui entraîne une augmentation de la demande en cartouches d'encre quelques mois plus tard.

Il est généralement possible de décomposer chaque terme de la série en une somme ou un produit de *composantes* ou *effets* qui expliquent chacune en partie l'évolution de la série chronologique (i.e. de la demande). Les composantes principalement utilisées :

- la *tendance* T_t représente l'évolution "gros-grain" sur un horizon à myen terme de quelques années (typiquement 3-5 ans).
- les *variations saisonnières* S_t : cet effet réapparaît à intervalles réguliers (pas forcément annuel). Crèmes glacées. $S_{t+T} = S_t$ et $\sum_{t=1}^{T} S_t = 0$.
- les *variations aléatoires* ou *aléas* A_t. Indépendances entre ces valeurs aléatoires.

Différentes manières de combiner ces composantes. A_t est pratiquement toujours présent :

- Demande purement aléatoire $X_t = A_t$. Pas de prévision possible.
- Demande stationnaire $X_t = M + A_t$
- Demande avec tendance $X_t = T_t + A_t$. Très souvent. Tendance linéaire $X_t = at + b + A_t$.
- $X_t = T_t + S_t + A_t$ ou $X_t = T_t S_t A_t$ (passer au log).

2.2 Estimation de la tendance : méthode des moindres carrés

Nuage de n points de coordonnées (x_i, y_i). On pose $y_i = ax_i + b + A_i$. Le problème est de déterminer a et b de manière à minimiser $F(a, b) = \sum_i (y_i - ax_i - b)^2 = \sum_i A_i^2$. C'est un problème d'optimisation d'une fonction quadratique sans contraintes. En écrivant les conditions d'optimalité, on a un système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = -2\sum_i x_i(y_i - ax_i - b) = 0 \quad (1)$$
$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = -2\sum_i (y_i - ax_i - b) = 0 \quad (2)$$

En introduisant les valeurs moyennes $\bar{x} = \sum_i \frac{x_i}{n}$ et $\bar{y} = \sum_i \frac{y_i}{n}$, l'équation (2) donne $\bar{y} = a\bar{x} + b$, ce qui signifie que la droite des moindres carrés passe par le centre de gravité $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage de points. En introduisant la dernière égalité dans (1), on obtient

$$a = \frac{\sum_i \frac{x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y}}{\sum_i \frac{x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\mathrm{var}(x)}$$

Exercice 1. *On suppose connues les demandes $x_1, \cdots, x_n$ sur les périodes 1 à n et on suppose que la série chronologique est de la forme $X_t = at + b + A_t$. Que valent a et b ?*

Démonstration. Les points dans le plan sont $(1, x_1), \cdots, (n, x_n)$. On a $\sum_{t=1}^n t = n(n+1)/2 = n\bar{t}$ et $\sum_{t=1}^n t^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, ce qui donne

$$a = \frac{12}{n(n+1)(n-1)}\left(\sum_t tx_t - \frac{n+1}{2}\sum x_t\right)$$
$$a = \frac{6}{(n-1)}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_t tx_t - \sum \frac{x_t}{n}\right)$$
$$a = \frac{6}{(n-1)}\left(\frac{\sum_t tx_t}{n\bar{t}} - \bar{x}\right)$$

et on a toujours $b = \bar{x} - a\bar{t} = \bar{x} - a\frac{n+1}{2}$. □

Exercice 2. *Application numérique* $x_1 = 15, x_2 = 19, x_3 = 20, x_4 = 22, x_5 = 24$

Démonstration. On a $n = 5$, $\bar{t} = 3$, $\bar{x} = 20$ et $\sum_t tx_t = 321$ et donc $a = 2,1$ et $b = 13,7$. □

2.2.1 Limites de la méthode

- Poids égal de tous les points pris en compte
- Peu réactif aux changements de tendances.
- La méthode est donc adaptée pour une demande à tendance régulière. Si ce n'est pas le cas, on pourra faire appel au *lissage exponentiel* (Section 2.4).

2.3 Variations saisonnières : méthode de Buys-Ballot

On suppose une tendance linéaire $T_t = at + b$. On considère que la périodicité de l'effet saisonnier est de T périodes (T périodes = 1 "année"). x_{ij} ($1 \leq j \leq T$, $1 \leq i \leq n$) désigne la demande de la $j^{\text{ème}}$ période de l'année i ($t = (i-1)T + j$). On recherche la série chronologique de la forme $\hat{x}_{ij} = a((i-1)T+j)+b_j$ la plus proche de la demande des n dernières années. On veut donc résoudre le problème :

$$\min_{a,b_1,\cdots,b_T} \sum_{ij} (x_{ij} - a\left((i-1)T+j\right) - b_j)^2$$

En dérivant par rapport à b_j, on a que $\sum_i (x_{ij} - a((i-1)T+j) - b_j) = 0$ et donc

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}}{n} - a\left(\frac{n-1}{2}T + j\right) = \bar{x}_{.j} - a\left(\frac{n-1}{2}T + j\right)$$

En réintroduisant les b_j dans le problème initial, on cherche donc la valeur a qui minimise :

$$\begin{aligned}\sum_{ij}(x_{ij} - \bar{x}_{.j} - aT(i-(n+1)/2))^2 &= \sum_{ij}(x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 + a^2T^2\sum_{ij}(i-(n+1)/2)^2 \\ &\quad - 2aT\sum_{ij}(x_{ij} - \bar{x}_{.j})(i-(n+1)/2)\end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{ij}(x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = T\sum_i (i-(n+1)/2)^2 \\ &= nT\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)^2}{2}\right) \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)T}{12}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{ij}(x_{ij} - \bar{x}_{.j})(i-(n+1)/2) &= \sum_{ij} ix_{ij} - i\bar{x}_{.j} - \frac{n+1}{2}(x_{ij} - \bar{x}_{.j}) \\ &= \sum_{ij} ix_{ij} - i\bar{x}_{.j} \\ &= T\sum_i i\bar{x}_{i.} - T\frac{n(n+1)}{2}\bar{x}_{..}\end{aligned}$$

donc

$$a = \frac{12}{nT(n^2-1)}\left(\sum_i i\bar{x}_{i.} - \frac{n(n+1)}{2}\bar{x}_{..}\right)$$

La tendance ne dépend donc que des moyennes annuelles, elle est la droite des moindres carrés construites sur les points $(\bar{t}_{i.}, \bar{y}_{i.})$.

En résumé, la méthode se divise en deux étapes :

- Méthodes des moindres carrés sur les moyennes annuelles.
- Calcul des coefficients saisonniers comme moyenne des écarts entre les valeurs x_t et la tendance estimée $T_t = at + b$.

2.4 Lissage exponentiel

On suppose qu'il n'y a pas d'effet saisonnier. Sinon, il faut "désaisonnaliser" les données (cf Section 2.3).

2.4.1 Lissage exponentiel simple

Estimation par une constante $\hat{x}_t = b$ qui minimise

$$\min_b \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k (x_{n-k} - b)^2$$

Cela suppose que l'historique est connu depuis la nuit des temps… Mais poids très faible des données les plus anciennes. $\gamma \in (0,1)$ est généralement autour de $0,7$ à $0,8$. Pour des valeurs plus petite, le passé est vite "ignoré", pour des valeurs plus grandes, on est moins sensible aux changements de tendance.

En dérivant par rapport à b, on a $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k (x_{n-k} - b) = 0$. Comme $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = \frac{1}{1-\gamma}$, on obtient

$$b = (1-\gamma) \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k x_{n-k}$$

Comme la tendance est estimée par une constante, il faut que la demande soit bien sûr stable.

2.4.2 Lissage exponentiel double

Estimation par une tendance linéaire qui minimise

$$\min_{a,b} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k (x_{n-k} + ak - b)^2$$

(remarquer que k va dans le passé d'où le $+ak$).

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k x_{n-k} + a\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2} - \frac{b}{1-\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k k x_{n-k} + a\frac{\gamma(1+\gamma}{(1-\gamma)^3} - \frac{b\gamma}{(1-\gamma)^2} = 0$$

On a utilisé pour cela les formules

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = \frac{1}{1-\gamma} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k\gamma^k = \frac{\gamma}{(1-\gamma)^2} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k^2\gamma^k = \frac{\gamma(1+\gamma)}{(1-\gamma)^3}$$

Pour calculer a et b, on introduit les séries lissée et doublement lissée :

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= (1-\gamma) \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k x_{n-k} \\
S_2(n) &= (1-\gamma) \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k S_1(n-k) \\
&= (1-\gamma)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \sum_{k'=0}^{\infty} \gamma^{k'} x_{n-k+k'} \\
&= (1-\gamma)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\gamma^k x_{n-k} \\
&= (1-\gamma)^2 \sum_{k=0}^{\infty} k\gamma^k x_{n-k} + (1-\gamma) S_1(n)
\end{aligned}$$

Cela permet d'obtenir la solution

$$a = \frac{1-\gamma}{\gamma}(S_1(n) - S_2(n)) \qquad\qquad b = 2S_1(n) - S_2(n)$$

De plus $S_1(n)$ et $S_2(n)$ sont très facilement mis à jour par les formules de récurrence :

$$\begin{aligned} S_1(n+1) &= (1-\gamma)x_{n+1} + \gamma S_1(n) \\ S_2(n+1) &= (1-\gamma)^2 x_{n+1} + \gamma S_2(n) + \gamma(1-\gamma)S_1(n) \end{aligned}$$