Projet (Partie 1) - Coloration d'un graphe

Description du problème

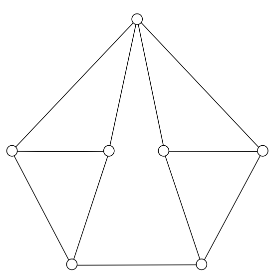
Étant donné un graphe $G = (V, E)$ simple, non orienté et connexe, une coloration de G est une affectation de couleurs (ou de numéros) aux sommets de V de telle sorte que deux sommets adjacents par une arête de E ne portent pas la même couleur (ou numéro). L'ensemble des sommets affectés d'une même couleur forme alors un stable de G. Colorier un graphe revient ainsi à partionner V en stables.

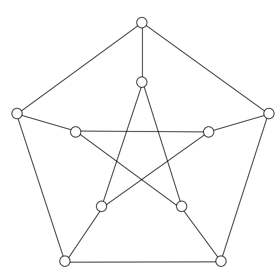
Quelques questions théoriques

Pour un grahe $G = (V, E)$, on note $\chi(G)$ le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier un graphe G. $\chi(G)$ est alors appelé nombre chromatique de G. On note également $d_G(x)$ le degré d'un sommet x de V dans G.

1. Montrer que $\chi(G) \leq \max_{x\in V}\{d_G(x)\} + 1$. Donner des exemples pour lesquels l'égalité est atteinte et un autre pour lequel la borne est très large.
2. Considérons $z \in V$ tel que $d_G(z) = \min_{x\in V}\{d_G(x)\}$. Démontrer que, si $G \setminus \{z\}$ est $\chi(G) - 1$ coloriable, alors $\chi(G) \leq d_G(z) + 1$. Proposer des exemples pour lesquels l'égalité est atteinte.
3. Si H est un sous-graphe de G, que peut-on dire de $\chi(H)$ par rapport à $\chi(G)$?
4. Un sommet $y \in V$ est un point d'articulation d'un graphe connexe $G = (V, E)$ si le graphe obtenu en enlevant y n'est plus connexe. Appelons $G_i, i = 1, \ldots, p$, une des p composantes connexes, obtenues à partir de G lorsque que l'on ôte le sommet y et G'_i le sous-graphe de G contenant G_i et y. Quelle relation peut-on établir entre $\chi(G)$ et les $\chi(G'_i), i = 1, \ldots, p$?

Trouver $\chi(G)$ pour les graphes G suivants :





Heuristiques

La détermination du nombre chromatique d'un graphe quelconque étant un problème NP-difficile, nous présentons deux heuristiques permettant de résoudre de manière approchée ce problème.

Algorithme glouton

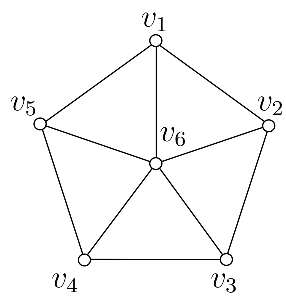
Pour un sommet v, on note $N(v)$ l'ensemble de ses voisins dans G et $c(v)$ le numéro affecté au sommet v. On définit un ordre de parcours arbitraire des sommets de V : $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

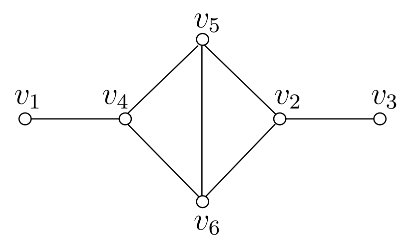
$c(v) = 0, \forall v \in V$.
for $j = 1$ to n **do**
  Choisir le plus petit entier non nul c non encore utilisé dans $N(v_j)$.
  $c(v_j) = c$.
end for

Remarquer que la coloration obtenue dépend de l'ordre initial. Montrer que, pour un ordre donné,

$$\chi(G) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \{\min\{j, d_G(v_j) + 1\}\}.$$

Appliquer l'algorithme sur les graphes suivants :





Algorithme de Welsh et Powell

L'algorithme de Welsh et Powell peut être défini comme suit :

1. Calculer le degré de chaque sommet.
2. Ranger les sommets par ordre décroissant de leurs degrés.
3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
5. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.
6. Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie.
7. Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore colorié de la liste.
8. Répéter les opérations 4 à 6.
9. Continuer jusqu'à avoir colorié tous les sommets.

Pour chaque heuristique, donner un exemple pour lequel l'algorithme ne permet pas d'obtenir une coloration optimale et un autre pour lequel le nombre chromatique trouvé est minimal.

Implémentation

Implémenter un programme qui permet de mettre en œuvre les deux heuristiques. Tester les algorithmes sur des graphes générés à l'aide du logiciel `rudy` en faisant varier le nombre de sommets et d'arêtes. On peut considérer des graphes de $n = 5, 10, 15, 20, \ldots$ sommets. Tester aussi vos algorithmes sur les instances qui se trouvent sur le site : http://epoc.isima.fr/~borne. On notera pour chaque jeu d'essais, le nombre chromatique et le temps de calcul (CPU time) pour chaque heuristique. Ces résultats seront récapitulés dans un tableau et analysés. Visualiser le graphe et la coloration obtenue en utilisant le logiciel `graphviz`.

Le compte-rendu à remettre au responsable de TP contiendra les parties 1 et 2 du projet.